

Els satèl·lits GPS (global positioning system, 'sistema de posicionament global') descriuen òrbites circulars al voltant de la Terra. El conjunt dels satèl·lits permet que en qualsevol punt de la Terra una persona amb un receptor GPS pugui determinar la posició on es troba amb una precisió de pocs metres. Tots els satèl·lits GPS estan a la mateixa altura i fan dues voltes a la Terra cada 24 hores. Sabent que els satèl·lits tenen una massa de 150 kg, calculeu:

- La velocitat angular dels satèl·lits i l'altura de la seva òrbita, mesurada sobre la superfície de la Terra.
- L'energia mecànica i la velocitat lineal que té un d'aquests satèl·lits GPS en la seva òrbita.
- La nova velocitat i el temps que trigaria a fer una volta a la Terra, si féssim orbitar un d'aquests satèl·lits a una altura doble.

Dades:

$$G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ Nm}^2\text{kg}^{-2};$$

$$M_T = 5,98 \times 10^{24} \text{ kg};$$

$$R_T = 6380 \text{ km}$$

$$\text{Període: } T = \frac{\Delta t}{N} = \frac{24 \text{ h}}{2} = 12 \text{ h} = 12 \cdot 3600 = 43200 \text{ s}$$

$$m = 150 \text{ kg}$$

$$(a) \text{ La velocitat angular: } \omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{43200 \text{ s}} = \boxed{1,45 \times 10^{-4} \frac{\text{rad}}{\text{s}}}$$

Fent servir la 3a llei de Kepler podem trobar el radi d'òrbita:

$$r^3 = \frac{GM_T \cdot T^2}{4\pi^2} = \frac{6,67 \times 10^{-11} \cdot 5,98 \times 10^{24}}{4\pi^2} \cdot (43200)^2 = 5,92 \times 10^{22} \text{ m}^3$$

$$r = \sqrt[3]{5,92 \times 10^{22} \text{ m}^3} = 3,9 \times 10^7 \text{ m}$$

$$h = r - R_T = 3,9 \times 10^7 - 6,38 \times 10^6 = \boxed{3,26 \times 10^7 \text{ m}}$$

(b) La velocitat lineal:

$$v = \sqrt{\frac{GM_T}{r}} = \sqrt{\frac{6,67 \times 10^{-11} \cdot 5,98 \times 10^{24}}{3,9 \times 10^7}} = \boxed{3198 \text{ m/s}}$$

Energia mecànica:

$$E_m = \frac{1}{2} m v^2 - \frac{GM_T m}{r} = \frac{1}{2} \cdot 150 \cdot (3198)^2 - \frac{6,67 \times 10^{-11} \cdot 5,98 \times 10^{24} \cdot 150}{3,9 \times 10^7}$$

$$\boxed{E_m = -7,67 \times 10^8 \text{ J}}$$

(c) Si tingues una altura doble:

$$r' = R_T + 2h = 6380 \times 10^6 \text{ m} + 2 \cdot 3,26 \times 10^7 \text{ m} = 7,16 \times 10^7 \text{ m}$$

Velocitat orbital:

$$v' = \sqrt{\frac{GM_T}{r'}} = \sqrt{\frac{6,67 \times 10^{-11} \cdot 5,98 \times 10^{24}}{7,16 \times 10^7}} = \boxed{2361 \text{ m/s}}$$

Període orbital:

$$T' = \frac{2\pi r'}{v'} = \frac{2\pi \cdot 7,16 \times 10^7}{2361} = 190580 \text{ s}$$

$$\boxed{T' = 53 \text{ h}} \text{ aprox.}$$