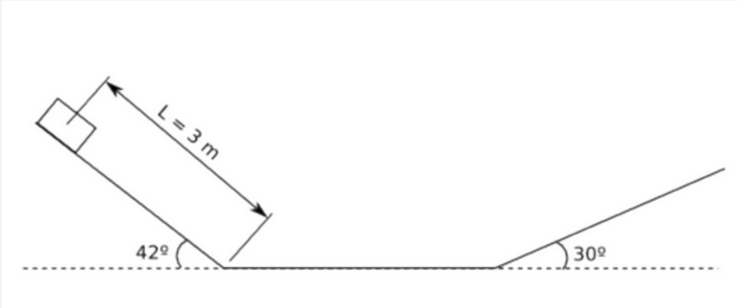
. Un cos de 2 kg, inicialment en repòs, baixa per un pla inclinat 42º respecte de l'horitzontal. Després de recórrer una distància de 3 m sobre el pla inclinat, arriba a un terra horitzontal i, finalment, puja per un altre pla inclinat 30º respecte de l'horitzontal (observa el dibuix).

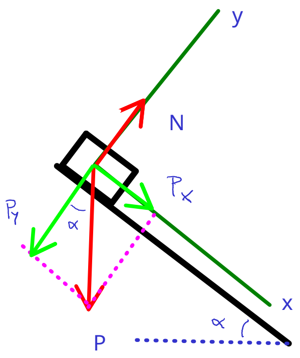


Suposant que els efectes del fregament són negligibles, calcula:

a. El temps que triga a arribar al peu del primer pla inclinat i la velocitat del cos en aquest moment.
b. La màxima longitud recorreguda pel cos en la pujada pel pla inclinat de la dreta.
c. Si el coeficient de fregament entre el cos i el primer pla inclinat fos $\mu = 0,4$; quanta energia s'alliberaria en forma de calor des de l'instant inicial fins a arribar al peu del primer pla inclinat?

Resolució:

Volem calcular el temps que tarda en arribar a baix i amb quina velocitat.
Per determinar el temps que tardarà podem utilitzar l'equació de moviment d'un moviment rectilini uniformement accelerat, però primer hauríem de determinar a quina acceleració baixa. Per fer-lo traçarem el diagrama de forces i plantejarem les equacions de Newton:



$$(x) \quad P_x = ma \qquad \mathrm{I}$$

$$(y) \quad N - P_y = 0 \qquad \mathrm{II}$$

on $P_x = P \sin\alpha \qquad \mathrm{III}$

$P_y = P \cos\alpha \qquad \mathrm{IV}$

així, de I i III:

$$P \cdot \sin\alpha = ma$$

$$mg \sin\alpha = ma$$

Si dividim ambdós membres de l'equació per m, obtenim:

$$a = g \sin\alpha = 9{,}81 \cdot \sin 42^\circ = 6{,}56 \ m/s^2$$

Podem ara escriure les equacions de moviment:

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

i com $x_0 = 0$; $v_0 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2} a t^2$

d'aquí: $t = \sqrt{\frac{2x}{a}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 3}{6{,}56}} = \boxed{0{,}96 \, s}$

on hem fet servir que la posició final es $x = L = 3 \, m$

Per determinar la velocitat fem servir l'equació de velocitat:

$$v = v_0 + at = at = 6{,}56 \cdot 0{,}96 = \boxed{6{,}27\ m/s}$$

La velocitat la podríem haver determinat utilitzant la conservació de l'energia mecànica. Les forces que intervenen en aquest problema són el pes (interacció gravitatòria, que és conservativa) i la força de contacte amb el pla inclinat (força normal). Hauríem d'observar que la força normal sempre té direcció perpendicular al desplaçament, per tant el seu treball sempre serà nul, ja que l'angle que forma la força amb la direcció de desplaçament és de 90º, i sabem, per la definició de treball que

$$W = N \cdot \Delta x \cos 90^\circ = 0$$

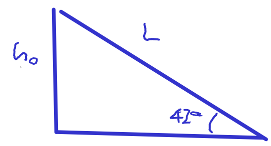
força — desplaçament — angle entre la força i el desplaçament

L'energia mecànica inicial (a dalt del pla inclinat) ha de ser igual a l'energia mecànica final (al peu del pla), així:

$$E_M(\text{inicial}) = E_c(\text{inicial}) + U(\text{inicial}) = \frac{1}{2} m v_0^2 + mgh_0$$

Però $v_0 = 0$ (parteix del repòs)

i $h_0 = L \cdot \sin 42^\circ$



$$\therefore\ E_{M_i} = mgL\sin 42^\circ = 2 \cdot 9{,}81 \cdot 3 \cdot \sin 42^\circ$$

$$E_{M_i} = 39{,}4\ J$$

L'energia final serà $E_{M_f} = \frac{1}{2} m v^2 + mgh_f$ però $h_f = 0$

per tant: $E_{M_f} = \frac{1}{2} m v^2 = 39{,}4\ J$ (l'energia ha de ser igual a la inicial perquè es conserva)

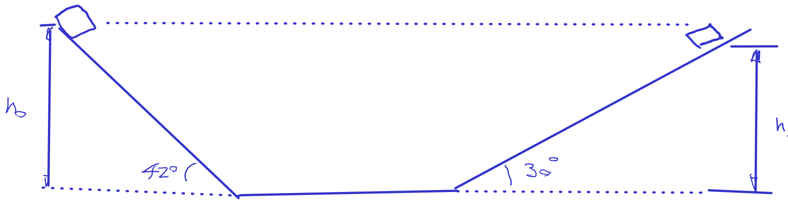
d'aquí podem obtenir la velocitat

$$v = \sqrt{\frac{2 \cdot E_M}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 39{,}4}{2}} = \boxed{6{,}27\ m/s}$$

i obtenim el mateix resultat que amb l'altre mètode.

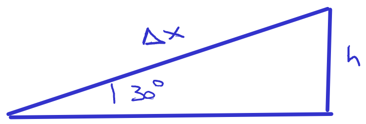
(b) Busquem ara la màxima longitud recorreguda pel cos sobre el segon pla inclinat.

Si tenim en compte que les forces implicades són les mateixes (el pes i la normal), tenim que l'energia mecànica es conserva, la qual cosa ens serveix per saber que el mòbil pujarà fins a la mateiixa altura, ja que quan arribi a l'altura màxima la seva velocitat serà nul·la i, per tant, també la seva energia cinètica. Tota la seva energia mecànica estarà en forma d'energia potencial igual que al començament i, com la massa i l'acceleració de la gravetat no han canviat, les altures seran les mateixes.



$$\left.\begin{array}{l} E_{M_i} = \underset{0}{E_{c_i}} + U_i = mgh_0 \\ E_{M_f} = \underset{0}{E_{c_f}} + U_f = mgh_f \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} E_{M_f} = E_{M_i} \\ mgh_f = mgh_i \Rightarrow h_f = h_i = 2m \end{array}$$

i si coneixem l'altura final podem determinar la distància recorreguda sobre el pla



$$\sin 30° = \frac{h}{\Delta x} \Rightarrow \quad \Delta x = \frac{h}{\sin 30°} = \frac{2}{0,5} = \boxed{4m}$$

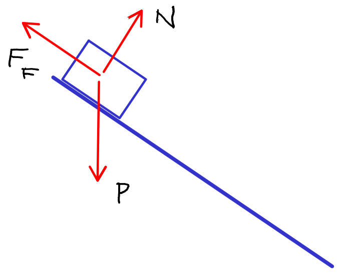
veiem que, com l'angle és més petit, com arriba a la mateixa altura ha de fer un recorregut més llarg. Això és conseqüència de la conservació de l'energia mecànica. Tots hem viscut l'experiència de pujar per una rampa amb més o menys pendent i sabem que quan hi ha menys pendent hem de fer menys esforç per pujar, això és perquè la força que hem de fer, igual al component x del pes, és proporcional al sinus de l'angle d'inclinació, però el preu que hem de pagar és desplaçar-nos una distància major, finalment el treball necessari és el mateix, ja que aquest és el producte de la força pel desplaçament, quan disminueix un l'altre augmenta en la mateixa proporció. Així el treball total, independentment del camí, serà igual a mgh. Només depen de la diferència d'altura entre l'estat final i inicial.

Finalment l'apartat (c) ens demana trobar la quantitat d'energia alliberada en forma de calor en el descens per la primera rampa si el coeficient de fricció és de 0,4.

L'energia mecànica només es conserva quan totes les forces que fan treball són conservatives, la força de fregament és una força no conservativa i, per tant l'energia mecànica no es conserva, la pregunta que ens podem formular és: què passa amb aquesta energia que es perd? Doncs, la resposta és senzilla, es transforma en una altra forma d'energia que anomenem calor, i que es transmet al medi ambient. D'aquesta manera, si afegim al principi de conservació de l'energia la que es transforma en calor podem obtenir un principi de conservació de l'energia més general.

El calor no és més que altra manifestació de l'energia cinètica, ja que la fricció fa que les molècules que formen part del material dels cossos que es freguen augmentin la seva mobilitat, però aquest és un fenomen microscòpic que observem com un augment de temperatura a escala macroscòpica i que anomenem calor.

Anem a calcular el treball de la força de fregament:



$$W = F_F \cdot \Delta x \cdot \cos 180°$$
$$= \mu N \, \Delta x \cos 180°$$
$$= \mu \underbrace{mg \cos 42°}_{N} \cdot \Delta x \cdot \cos 180°$$

on hem tingut en compte que l'angle entre la força de fregament i el sentit del deplaçament és de 180°.

$$W = 0,4 \cdot 2 \cdot 9,81 \cdot \cos 42° \cdot 3 \cdot (-1) = \boxed{-17,5 \text{ J}}$$

Aquesta serà l'energia que es transmetrà al medi en forma de calor. El signe negatiu l'hem d'interpretar com que el nostre sistema perd energia, ja que l'energia mecànica final és més petita que la inicial.